Apellido: .... Nombre: .... Legajo: ....

Recuperatorio de 1^{er} Parcial de **MATEMATICA SUPERIOR**

16 de octubre de 2012

TEMA: **30**

1				2	3			Nota Final
1.5 p.	1 p.	1 p.	2 p.	2.5 p.	1.5 p.	1.5 p.	1 p.	

LA NOTA ES N = X – 2 SIENDO X LA SUMA DE PUNTOS. TIEMPO: 60 MINUTOS

Ejercicio 1: Analice si las siguientes proposiciones son Verdaderas o Falsas, demostrando o justificando correctamente en su hoja:

a) El valor principal del complejo $z = (\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} j)^j$ es un número real positivo. V ☐ F ☐

b) Sea $f(x) = \text{sen}(\pi x)$ si $x \in (0,1)$ $\wedge$ $f(x) = f(x+1)$ entonces el desarrollo en Serie Exponencial de Fourier de f tiene todos sus coeficientes reales. V ☐ F ☐

c) El valor medio de la función del item anterior es: 0.5 V ☐ F ☐

d) La transformada Z de $f(n) = \begin{cases} 3 & \text{si n es impar} \\ (-2)^n & \text{si n es par} \end{cases}$ es $F(z) = \frac{3z}{z-1} + \frac{z}{z+2}$ V ☐ F ☐

Ejercicio 2:

Resuelva utilizando Transformada de Laplace: $y'(t) = 1 - \int_0^t y(t-u)e^{-2u} d(u) \quad y(0) = 1$

Complete: Y(s) = ... y(t) = ...

Ejercicio 3:

Sea $G(s) = \frac{k\,(s^2 - 5s - 6)}{s^3 - 6s^2 + 4s - 24}$ la transferencia de un sistema.

a) Grafique la constelación de polos y ceros de G(s). Indique si el sistema es estable.

b) Halle $k \in$ |R sabiendo que $|G(j3)| = 2$

c) Con k=2 grafique $|G(s)|$ a lo largo del eje $\sigma = \text{Re}[s]$.

RESPUESTAS TEMA 30

Ejercicio 1:

a) Verdadero. Da $z= e^{-\pi/3}$

b) Verdadero. Pues la f dada es PAR.

c) Falso. Es mayor a 0.5, es $2/\pi$.

d) Falso.

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} 3 \bullet z^{-2k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} (-2)^{2k} \bullet z^{-2k} = 3 \bullet \left(\frac{1}{z}\right) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z}\right)^{2k} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{z}\right)^{2k} =$$

$$= \frac{3}{z} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{z^2}\right)^{k} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{4}{z^2}\right)^{k} = \frac{3}{z} \frac{1}{1-\frac{1}{z^2}} + \frac{1}{1-\frac{4}{z^2}} = \frac{3}{z} \frac{z^2}{z^2-1} + \frac{z^2}{z^2-4} = \frac{3z}{z^2-1} + \frac{z^2}{z^2-4}$$

Ejercicio 2:

$Y(s) = \dfrac{s+2}{s\,(s+1)}$ $\quad y(t) = 2 - e^{-t}$

Ejercicio 3:

polos: 2j y -2 j ceros: -1 Es estable b) k = raiz(10)

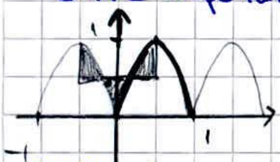
Mat Sup 1° parcial | tema 30 | 16-10-12

EJ 1 Analice si las sig. proposiciones son V o F, demostrando o justificando correctamente:

a) El valor principal del complejo $z = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} j\right)^{j}$ es un número real positivo $\boxed{V}$

$$\ln(z) = j \ln\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} j\right) = j \cdot \left[\overbrace{\ln(1)}^{0} + j\frac{\pi}{3}\right] = j\left(\frac{\pi}{3} j\right) = -\frac{\pi}{3} = \ln(z) \rightarrow z = e^{-\frac{\pi}{3}} > 0$$

b) Sea $f(x) = \operatorname{sen}(\pi x)$ si $x \in (0,1)$ $\wedge$ $f(x) = f(x+1)$ entonces el desarrollo en serie exponencial de Fourier de f tiene todos los coef reales



es una función par $\rightarrow$ coef reales $\boxed{V}$ /

c) El valor medio de la función del ítem anterior es 0,5 $\boxed{F}$ /

El valor medio está por encima de 0,5. En el gráfico se puede observar que en 0,5 NO distribuye áreas iguales. (es 0,64)

d) La transformada de z de $f(n) = \begin{cases} 3 & \text{si } n \text{ es impar} \\ (-2)^n & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$ es $F(z) = \frac{3z}{z-1} + \frac{z}{z+2}$ $\boxed{F}$ /

$n = 2k+1$; $n = 2k$

$$F(z) = \sum_{k=0}^{\infty} 3 \cdot \left(\frac{1}{z}\right)^{2k+1} + \left(\frac{-2}{z}\right)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{3}{z}\left(\frac{1}{z^2}\right)^{k} + \left(\frac{4}{z^2}\right)^{k} = \frac{3}{z} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{z^2}} + \frac{1}{1 - \frac{4}{z^2}} =$$

$$= \frac{3}{\cancel{z}} \cdot \frac{z^{\cancel{2}}}{z^2 - 1} + \frac{z^2}{z^2 - 4} \neq \frac{3z}{z-1} + \frac{z}{z+2}$$

EJ 2 Resuelva utilizando transformada de Laplace: $Y(s)$ e $y(t)$

$$y'(t) = 1 - \int_0^t y(t-u)\, e^{-2u}\, du \qquad y(0) = 1$$

$$Y(s) \cdot G(s) = \int_0^t y(t-u)\, g(u)\, du$$

$$\rightarrow s\,Y(s) - \overbrace{y(0)}^{1} = \frac{1}{s} - Y(s) \cdot \frac{1}{s+2} \longrightarrow s\,Y(s) + Y(s)\,\frac{1}{s+2} = \frac{1}{s} + 1$$

$$Y(s)\left(s + \frac{1}{s+2}\right) = \frac{1+s}{s} = Y(s)\left(\frac{s^2 + 2s + 1}{s+2}\right) \longrightarrow Y(s) = \frac{1+s}{s} \cdot \frac{s+2}{s^2 + 2s + 1}$$

$$Y(s) = \frac{\cancel{(s+1)}\,(s+2)}{s\,(s+1)^{\cancel{2}}} = \frac{s+2}{s\,(s+1)} = \frac{\overset{=2}{A}}{s} + \frac{\overset{=-1}{B}}{s+1} = \boxed{\frac{2}{s} - \frac{1}{s+1} = Y(s)}$$ /

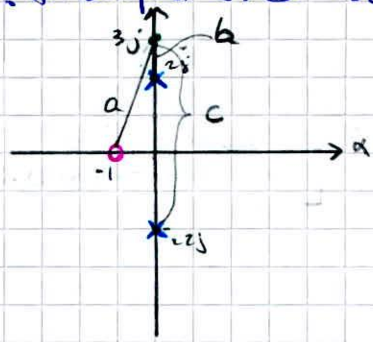
$$\boxed{y(t) = 2 - e^{-t}}$$ /

EJ 3 Sea $G(s) = \frac{k\,(s^2-5s-6)}{s^3-6s^2+4s-24}$ la transferencia de un sistema.

a) Grafique la constelación de polos y ceros de $G(s)$. Indique si el sistema es estable.

$$G(s) = \frac{k\,\cancel{(s-6)}\,(s+1)}{\cancel{(s-6)}\,(s^2+4)}$$

→ Ceros: $-1; \infty$
Polos: $2j; -2j$



La parte real de los polos $= 0$ →

$\boxed{\text{ES MARGINALMENTE ESTABLE}}$

b) Halle $k \in \mathbb{R}$ sabiendo que $|G(3j)| = 2$

$$|G(3j)| = \frac{k\,a}{b\cdot c} = \frac{k\sqrt{10}}{1\cdot 5} = 2 \rightarrow k = \frac{10}{\sqrt{10}} = \boxed{\sqrt{10} = k}$$

c) Con $k=2$ grafique $|G(s)|$ a lo largo del eje $\sigma = Re(s)$

$$G(s) = \frac{2\,(s+1)}{s^2+4}$$